Hitchin moduli space

1986

4d Anti Self duality equation
(ASD)

$\mathbb{R}^4 \ni x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$

($\mathbb{H}$: quaternion $\quad x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$ij = k$

connection $\quad A = \sum_{\alpha=0}^{3} \underset{\sim}{A_\alpha(x)} dx_\alpha$

skew hermitian matrix

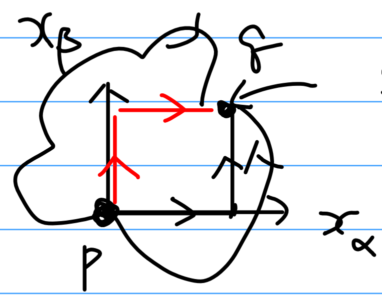
$\nabla_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + A_\alpha \quad$ differential operator acting on vector valued fct.

curvature $\quad F_{\alpha\beta} \overset{\text{def.}}{=} [\nabla_\alpha, \nabla_\beta]$

$$= \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} + [A_\alpha . A_\beta]$$

$F_A = \sum_{\alpha<\beta} F_{\alpha\beta}\, dx_\alpha \wedge dx_\beta \quad$ curvature 2-form

$F_{\alpha\beta} = 0 \quad \forall \alpha, \beta$



solution が同じ
path の取り方によらない.

より一般に, どんな道に沿っても同じ.
(連続変形でうつりあう)

いいかえ: pから出発し, 解を考えることで,

pにおけるベクトル

同一視

qにおけるベクトル

(ベクトル束 + connection の自明化ができる)

$F_{\alpha\beta}$ $\quad \alpha, \beta \quad$ (0,1), (0,2), (0,3)
(1,2), (1,3)
(2,3)

6 components

ASD equation:
$$\begin{cases} F_{01} = -F_{23} \\ F_{02} = -F_{31} \\ F_{03} = -F_{12} \end{cases}$$

Q. meaning?

① Hodge star operator
$* : \Lambda^2 \to \Lambda^2 \qquad *^2 = 1.$

$$\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$$

$$F_A \in \Lambda^2_- \quad : \text{ASD}$$

② $z_0 = x_0 + i x_1$ $\quad \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$

$z_1 = x_2 + i x_3$ $\quad \cong \mathbb{C}^2$

$$\text{☆} \quad [\nabla_0 + i\nabla_1, \nabla_2 + i\nabla_3] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_{02} - F_{13} = 0 \\ F_{12} + F_{03} = 0 \end{cases}$$

2 components of 3 ASD equ.

Analog of Cauchy Riemann equation $\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$, $f = (u + iv)$

☆ $\Longleftrightarrow$ holomorphic (local) trivialization が存在

$$s \text{ s.t. } \begin{cases} (\nabla_0 + i\nabla_1) s = 0 \\ (\nabla_2 + i\nabla_2) s = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_0 = x_0 + j x_2 \\ w_1 = x_1 - j x_3 \end{cases}$$

$$[\nabla_0 + j\nabla_2, \nabla_1 - j\nabla_3] = 0$$

$$\begin{cases} F_{01} + F_{23} = 0 \\ F_{03} + F_{12} = 0 \end{cases}$$

remaining component of ASD equ.

$$\mathrm{ASD} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{CR equ. for } z_0, z_1 \\ \qquad\qquad\quad\;\; w_0, w_1 \end{array} \right.$$

<u>Remark</u>. quarternionic CR equation ?

$\mathbb{H}$-CR equ $\overset{\det.?}{\iff}$ Jacobi 行列が $\mathbb{C}$-linear ($\mathbb{H}$)

この条件はきつすぎて自明な解

Hitchin's (A)SD equation

$=$ 2d reduction of ASD equ.

(x_0, x_1) $\updownarrow$

Assume $A_\alpha = A_\alpha(x_0, x_1)$ $\alpha = 0,1,2,3$

independent of x_2, x_3

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_2 = A_2 \\ \Phi_3 = A_3 \end{array} \right.$$ matrix valued fct on $\mathbb{R}^2 \ni (x_0, x_1)$, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$

$$☆ \Rightarrow [\nabla_0 + i\nabla_1, \Phi_2 + i\Phi_3] = 0 \quad (\mathrm{H1})$$

matrix-valued fction に関する Cauchy Riemann 方程式

i.e. $\Phi_2 + i\Phi_3 = \Phi$ is 正則!

$$F_{01} = -F_{23} = -[\phi_2, \phi_3] = \frac{i}{2}[\phi_1, \phi^*] \quad \text{(H2)}$$

$A_0 dx_0 + A_1 dx_1$
curvature

Hitchin's observation

This pair of equations (H1, H2) makes sense for a (compact) Riemann surface X

1-dim cpx manifold

$E \to X$ cpx vector b'dle + herm. metric
∇ : connection on E
Φ : section of $\mathrm{End}\, E \otimes K_X$

canonical b'dle
dz

$$\begin{cases} \text{(H1)} \ \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \Phi = 0 & \Phi : (1,0) \\ \text{(H2)} \ F_\nabla = -[\Phi, \Phi^*] & \end{cases}$$

2-form $\circledast \, dz \wedge d\bar{z}$

Analogue of CR equation for W_0, W_1

$$(\ast\ast) \quad [\nabla_0 + j \underbrace{\nabla_2}_{\phi_2}, \nabla_1 - j \underbrace{\nabla_3}_{\phi_3}] = 0$$

この式を

flatness equation for a connection $\mathcal{D}$

とみなす．　　　　hermitian metric を保つとは限らない．

where $\mathcal{D} = \nabla + i(\phi dz - \phi^* d\bar{z})$

$$(\star\star) \Leftrightarrow [\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1] = 0$$
$$\Leftrightarrow F_{\mathcal{D}} = 0$$

$$(\mathrm{H1}) \Longleftarrow \begin{cases} (\mathrm{H1})\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \Phi = 0 \\ (\mathrm{H2})\ F_{\nabla} + [\Phi, \Phi^*] = 0 \end{cases} \Longrightarrow F_{\mathcal{D}} = 0$$

(Hitchin's equation)

(H1), $F_{\mathcal{D}} = 0$ は hermitian metric を考えずとも定式化される．

<u>Hitchin's</u>
<u>main result</u>　(non-abelian Hodge theory)

Converses of $\Leftarrow$, $\Rightarrow$ が成り立つ

(ある仮定のもと)

Th. X: compact
E: cpx vector bdle
$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}}$ is defined on E
$\Phi \in \mathrm{End}\, E \otimes K_X$ a section $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \Phi = 0$

仮定. (E, Φ) は stable (open condition)
$0 \neq S \subsetneq E$
holomorphic subbundle, $\Phi(S) \subset S \otimes K_X$
に対し,
$$\frac{\deg S}{\operatorname{rank} S} < \frac{\deg E}{\operatorname{rank} E}$$
$\Longrightarrow$ $\exists$ hermitian metric s.t. (H1, H2) is satisfied
(for ∇ = Chern connection)

E: as above
$\mathcal{D}$: (projectively) flat connection

仮定. $\mathcal{D}$ is irreducible
$\nexists S$ nontrivial subbdle preserved by $\mathcal{D}$
$\Longrightarrow$ $\exists h$ s.t. (H1, 2) is satisfied

証明は難しい.
(Kobayashi–Hitchin conjecture)

<u>toy model</u>

$$\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^\times$$

stable の irreducible

$$= S^{2n+1} / S^1$$

長さ $=1$ に normalize する.

これが Hermitian metric の構成する

moduli space $=$ solutions of (H1, 2) (modulo gauge equivalence)

Higg's bundle の moduli space $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ Hitchin's moduli space $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ (proj.) flat connection の moduli sp.

$\uparrow$ X の cpx structure に依存

$\uparrow$ X の topology のみに依存

cf. Hodge decomp. X: cpt Kähler mfd

$$\bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X) \cong H^k(X, \mathbb{C})$$

Dolbeault cohomology

deRham coh.

課題　以下から1題以上を解答せよ。
知られた結果を使って議論する場合は引用をきちんと行うこと

問1. 授業の途中で言及した結果

$$[\nabla_0 + i\nabla_1, \nabla_2 + i\nabla_3] = 0$$

が成立つとき，$0 \in \mathbb{C}^2$ の近傍で定義された

$$\begin{cases} (\nabla_0 + i\nabla_1) s = 0 \\ (\nabla_2 + i\nabla_3) s = 0 \end{cases}$$

の解が"たくさん"あること，すなわち任意の与えられたベクトル s_0 に対し　$s(0) = s_0$ となるような上の方程式の解が存在することを示せ.

問2. $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ （$\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$）が C^∞ 級で Jacobi行列が $\mathbb{H}$ 線型のとき，
f がアファイン変換であることを示せ。

問3. 4d→2d の代わりに 4d→1d の reduction を考える。$(\nabla_0 = d + A_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ を解とする。
さらに定義域は閉区間 $[0,1]$ とする。
解 $(\nabla_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ と $g : [0,1] \longrightarrow U(n)$ に対し
（$U(n)$: n×n unitary行列全体）

$$(g \circ \nabla_0 \circ g^{-1}, g\Phi_1 g^{-1}, g\Phi_2 g^{-1}, g\Phi_3 g^{-1})$$

（$g \circ \nabla_0 \circ g^{-1} = d + g\,d(g^{-1}) + gA_0 g^{-1}$）
により新しい解を定め，
さらに $g(0) = g(1) = I$ のとき
$(\nabla_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ と $(g\circ\nabla_0\circ g^{-1}, g\Phi_1 g^{-1}, g\Phi_2 g^{-1}, g\Phi_3 g^{-1})$
は gauge 同値であるという。
解の gauge 同値類の全体のなすモジュライ空間を決定せよ.